**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
 FACULTAD DE INGENIERÍA  
 <75.12> ANÁLISIS NUMÉRICO**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 2 | | | | | | | 2 | | 0 | | | 1 | | 6 | | | Análisis profundizado de errores | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| AÑO | | | | | | | | | | y estabilidad en algoritmos para | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | la resolución de un mismo problema | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| TP NRO | | | | | | | CUAT | | | | | | | | | | TEMA | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **INTEGRANTES DEL GRUPO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 7 | | | | | | | M | | e | | | r | | l | | | o | |  | | L | | e | | i | | v | | a | |  | | | N | | a | | | h | | u | | e | | l | |  | |  | |  | | 9 | | 2 | | 1 | | 1 | | 5 | |
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
| C | | o | | | z | | z | | | a | |  | | F | | a | | b | | r | | i | | z | | | i | | o | | |  | | L | | u | | i | | s | |  | |  | | 9 | | 7 | | 4 | | 0 | | 2 | |
| GRUPO | | | | | | | APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
| **DATOS DE LA ENTREGA** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  |  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | 1 | | | 5 | | 0 | 6 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 | |  | |  | | 0 | | 6 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 |
| ARCHIVO | | | | | | | | | | | | | | | | NRO CONTROL | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA VENC | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA ENTR | | | | | | | | | | | | | | |
| **CORRECCIONES** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  |  | | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| FECHA | | | | | | | | | | | NOTA | | | | | | | | | | | | | OBSERVACIONES | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| DOCENTE | | | | | | | | | | | FIRMA | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Introducción

En la actualidad, científicos e ingenieros trabajan en problemas cada vez más complejos. En general se requiere el uso de computadoras para estudiar modelos matemáticos a través del uso de la algoritmia.

Mediante esta metodología, una computadora es capaz de calcular aproximaciones a la solución de un problema determinado. Debido a que la aritmética con que opera tiene precisión finita, pueden introducirse errores de redondeo y truncamiento en las operaciones efectuadas.

Entonces, es inevitable pensar en la utilización de algoritmos simples para reducir el tiempo de cómputo, uso de memoria como también de errores.

Objetivos

* A partir de los resultados del trabajo práctico número 1 (TP1), realizar un análisis más exhaustivo a partir de la interpretación del cálculo, desarrollo y resultado del problema presentado teniendo en cuenta en el análisis teórico sus errores, estabilidad, orden y convergencia de los algoritmos presentados.
* A partir del cambio del modelo del problema matemático respecto del TP1, implementar algoritmos propuestos que permitan calcular la resolución del problema del movimiento de un cuerpo celeste respecto de otro y su precesión, mediante los hallazgos de Newton y el término propuesto por Einstein.

Resumen

En primer lugar, a partir de los resultados obtenidos en el TP1, se realizarán cálculos de los semiejes, periodo y un cociente determinado por las leyes de Kepler, para analizar el cumplimento de las mismas y la convergencia de los métodos utilizados, siendo el algoritmo uno el método de Euler implícito y el algoritmo dos el método de Runge-Kutta 4. También a partir de diferenciación numérica se analizara la conservación de la energía del sistema.

Luego, en una segunda parte se desarrollarán dos algoritmos modificados respecto de los propuestos en el TP1 para aplicar la resolución al problema propuesto por Einstein (cambio de modelo).

Durante el desarrollo se realizaran cálculos para la obtención termino llamado precesión, como también cálculos para la energía y el tiempo de corrida del algoritmo entre otros parámetros no tan principales como estos, aumentando cada vez el “paso”, siendo cada uno al menos un orden de magnitud superior al previo. Finalmente llegando a la obtención de conclusiones respecto a su precesión y orden a través del análisis teórico e interpretación de gráficos.

A: Análisis clásico de orbitas – Leyes de Kepler

En esta sección se analizará, a partir de resultados del TP1, la cuadratura y la diferenciación numérica, la convergencia de los resultados a calcular, como también el cumplimiento de las leyes de Kepler y la conservación de la energía.

A.1: Primera Ley de Kepler (Algoritmo 1)

**Primera ley** (1609): "*Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse*".

Cálculos del semieje mayor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje mayor aproximado ()** | **Error del semieje mayor (∆a)** | **Semieje mayor (a)**  **(a =** ± **∆a)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Como los métodos fueron convergentes en el TP1, se da la siguiente definición para el cálculo de la convergencia según corresponda la variable durante todo el TP2:

Siendo el orden de convergencia, y ∆x el error de la variable a analizar en cierto k grande (últimos resultados).

Cálculos del semieje menor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje menor aproximado ()** | **Error del semieje menor (∆b)** | **Semieje menor (b)**  **(b =** ± **∆b)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge, y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA PRIMERA LEY? Debería ser parecido pero no exactamente elíptica según el paso y el algoritmo**

A.2: Segunda Ley de Kepler (Algoritmo 1)

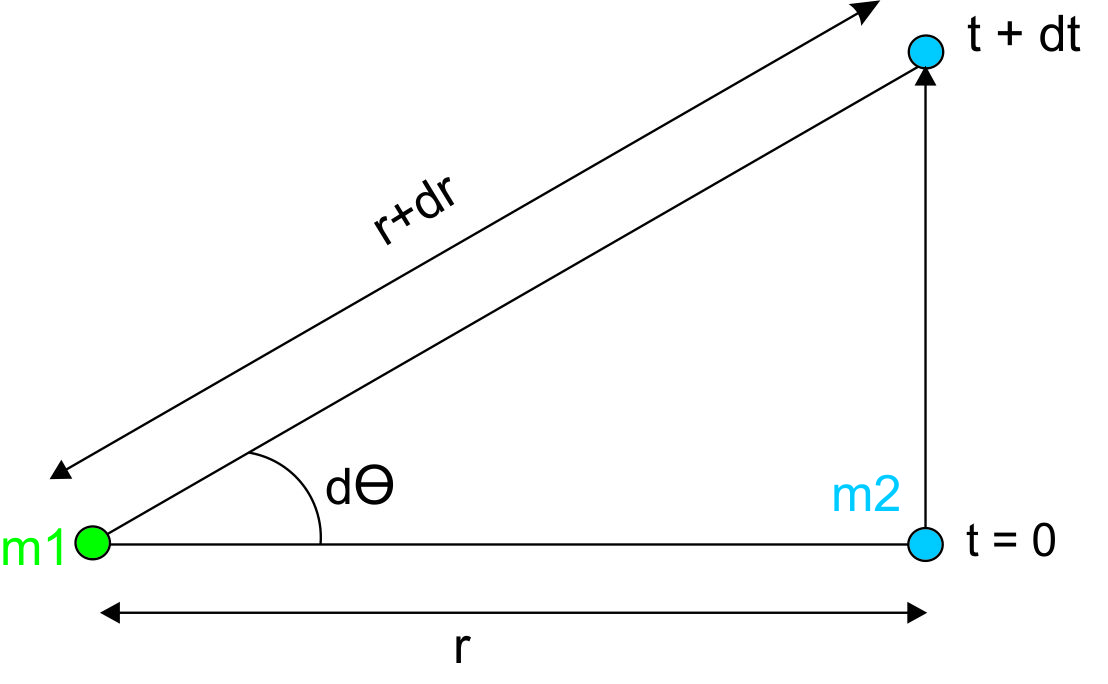
**Segunda ley** (1609): "*El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales*".

Se propone la siguiente ecuación para el análisis del cumplimiento de la segunda ley en la órbita Mustafar:

Donde *dA* es el área barrida por el radio vector desde la estrella al planeta en el tiempo *dt* y h el momento angular especifico.

A partir de cuadratura numérica la idea es llegar al resultado del periodo tal que:

Siendo T el periodo y el área barrida de una órbita, que mediante el siguiente esquema:



Considerando dr chico y

Como el algoritmo uno programa el método de Euler Inverso de (orden uno), se podrán usar métodos de cuadratura numérica para la resolución respecto al orden correspondiente, por lo cual sería coincidente utilizar cuadratura numérica por medio de intervalos regulares estrechos a través del método de rectángulo.

Utilizando este **método** se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Área aproximada ()** | **Error del área(∆)** | **Área ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Período aproximada ()** | **Error del período (∆T)** | **Período (T)**  **(T =** ± **∆T)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA SEGUNDA LEY? No debería, por lo menos no exactamente**

A.3: Tercera Ley de Kepler (Algoritmo 1)

**Tercera ley** (1618): "*Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*".

Se analizará a través de la obtención de una constante por medio del cociente:

Donde es el semieje mayor calculado de la órbita para cada N.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Cociente** |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge **(A UNA CONSTANTE)** y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA TERCERA LEY? Si debería**

A.4: Integral de energía del sistema (Algoritmo 1)

Se analizará la conservación de la energía del sistema a través de su fórmula correspondiente, a partir de la diferenciación numérica:

Donde , siendo la aproximación numérica de con y siendo

Como ya fue mencionado en la sección A.2, este algoritmo posee orden uno, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible derivada en atraso o en adelanto.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

**Realizar un gráfico superpuesto de la soluciones de energía para las primeras 3 Ns. ¿SE CONSERVA En? Si debería y explicar resultados**

A.5: Primera Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.1.

Cálculos del semieje mayor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje mayor aproximado ()** | **Error del semieje mayor (∆a)** | **Semieje mayor (a)**  **(a =** ± **∆a)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

Cálculos del semieje menor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje menor aproximado ()** | **Error del semieje menor (∆b)** | **Semieje menor (b)**  **(b =** ± **∆b)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge, y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA PRIMERA LEY? Debería ser parecido pero no exactamente elíptica según el paso y el algoritmo y para este caso, una mejor aproximación porque es un runge kutta 4 de orden 4.**

A.6: Segunda Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.2 pero como el algoritmo 2 programa el método de Runge-Kutta 4 de (orden cuatro), se podrán usar métodos de cuadratura numérica para la resolución respecto al orden correspondiente, por lo cual sería coincidente utilizar cuadratura numérica por método de Simpson o Romberg 2.

Utilizando este **método** se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Área aproximada ()** | **Error del área(∆)** | **Área ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Período aproximada ()** | **Error del período (∆T)** | **Período (T)**  **(T =** ± **∆T)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA SEGUNDA LEY? No debería, por lo menos no exactamente**

A.7: Tercera Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.3.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Cociente** |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

A partir de los resultados obtenidos se ve que el método converge **(A UNA CONSTANTE)** y si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

**FINALMENTE: ¿CUMPLE LA TERCERA LEY? Si debería**

A.8: Integral de energía del sistema (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.4 pero como ya fue mencionado en la sección A.6, este algoritmo posee orden cuatro, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible aproximación por polinomios de Taylor o por medio del método de Richardson.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

**Realizar un gráfico superpuesto de la soluciones de energía para las primeras 3 Ns. ¿SE CONSERVA En? Si debería y explicar resultados**