**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
 FACULTAD DE INGENIERÍA  
 <75.12> ANÁLISIS NUMÉRICO**



|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **DATOS DEL TRABAJO PRÁCTICO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 2 | | | | | | | 2 | | 0 | | | 1 | | 6 | | | Análisis profundizado de algoritmia | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| AÑO | | | | | | | | | | para la resolución de un mismo | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1 | | | | | | | | | | problema a partir de un nuevo modelo | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| TP NRO | | | | | | | CUAT | | | | | | | | | | TEMA | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| **INTEGRANTES DEL GRUPO** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| 7 | | | | | | | M | | e | | | r | | l | | | o | |  | | L | | e | | i | | v | | a | |  | | | N | | a | | | h | | u | | e | | l | |  | |  | |  | | 9 | | 2 | | 1 | | 1 | | 5 | |
| APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
| C | | o | | | z | | z | | | a | |  | | F | | a | | b | | r | | i | | z | | | i | | o | | |  | | L | | u | | i | | s | |  | |  | | 9 | | 7 | | 4 | | 0 | | 2 | |
| GRUPO | | | | | | | APELLIDO Y NOMBRE | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | PADRÓN | | | | | | | | | |
| **DATOS DE LA ENTREGA** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
|  |  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | 1 | | | 5 | | 0 | 6 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 | |  | |  | | 0 | | 6 | | 2 | | 0 | | 1 | | 6 |
| ARCHIVO | | | | | | | | | | | | | | | | NRO CONTROL | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA VENC | | | | | | | | | | | | | | | | FECHA ENTR | | | | | | | | | | | | | | |
| **CORRECCIONES** | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  |  | |  | |  | |  | |  | | |  | |  |  | | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | | |  | | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |  | |
| FECHA | | | | | | | | | | | NOTA | | | | | | | | | | | | | OBSERVACIONES | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| DOCENTE | | | | | | | | | | | FIRMA | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | |  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|  | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Introducción

En la actualidad, científicos e ingenieros trabajan en problemas cada vez más complejos. En general se requiere el uso de computadoras para estudiar modelos matemáticos a través del uso de la algoritmia.

Mediante esta metodología, una computadora es capaz de calcular aproximaciones a la solución de un problema determinado. Debido a que la aritmética con que opera tiene precisión finita, pueden introducirse errores de redondeo y truncamiento en las operaciones efectuadas.

Entonces, es inevitable pensar en la utilización de algoritmos simples para reducir el tiempo de cómputo, uso de memoria como también de errores.

Objetivos

* A partir de los resultados del trabajo práctico número 1 (TP1), realizar un análisis más exhaustivo a partir de la interpretación del cálculo, desarrollo y resultado del problema presentado teniendo en cuenta en el análisis teórico sus errores, estabilidad, orden y convergencia de los algoritmos presentados.
* A partir del cambio del modelo del problema matemático respecto del TP1, implementar algoritmos propuestos que permitan calcular la resolución del problema del movimiento de un cuerpo celeste respecto de otro y su precesión, mediante los hallazgos de Newton y el término propuesto por Einstein.

Resumen

En primer lugar, a partir de los resultados obtenidos en el TP1, se realizarán cálculos de los semiejes, periodo y un cociente determinado por las leyes de Kepler, para analizar el cumplimento de las mismas y la convergencia de los métodos utilizados, siendo el algoritmo uno el método de Euler implícito y el algoritmo dos el método de Runge-Kutta 4. También a partir de diferenciación numérica se analizara la conservación de la energía del sistema.

Luego, en una segunda parte se desarrollarán dos algoritmos modificados respecto de los propuestos en el TP1 para aplicar la resolución al problema propuesto por Einstein (cambio de modelo).

Durante el desarrollo se realizaran cálculos para la obtención termino llamado precesión, como también cálculos para la energía, aumentando cada vez el “paso”, siendo cada uno al menos un orden de magnitud superior al previo. Finalmente llegando a la obtención de conclusiones respecto a su precesión y orden a través del análisis teórico e interpretación de gráficos.

A: Análisis clásico de orbitas – Leyes de Kepler

En esta sección se analizará, a partir de resultados del TP1, la cuadratura y la diferenciación numérica, la convergencia de los resultados a calcular, como también el cumplimiento de las leyes de Kepler y la conservación de la energía.

A.1: Primera Ley de Kepler (Algoritmo 1)

**Primera ley** (1609): "*Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse*".

Cálculos del semieje mayor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje mayor aproximado ()** | **Error del semieje mayor (∆a)** | **Semieje mayor (a)**  **(a =** ± **∆a)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

Cálculos del semieje menor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje menor aproximado ()** | **Error del semieje menor (∆b)** | **Semieje menor (b)**  **(b =** ± **∆b)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Como los métodos fueron convergentes en el TP1, se da la siguiente definición para el cálculo de la convergencia según corresponda:

Siendo el orden de convergencia, y ∆x el error de la variable a analizar en cierto k grande (últimos resultados).

Si bien ahora se sabe cuáles son los métodos utilizados, es preferible utilizar esta definición de orden de convergencia y comparar con los órdenes esperados que deberían obtenerse., ya que se presentan mucho los cálculos aproximados de los errores. Si el resultado no es el esperado, tal vez se proceda a utilizar un diferente criterio de cálculo del orden ya sea a través de límites, derivadas o perturbaciones, como también se podría utilizar otro criterio similar para el cálculo de errores, especialmente cuando se recurre a los métodos de cuadratura y diferenciación numérica.

Suponiendo averiguados los datos se vería que los semiejes convergen a un número, pero sería notable la diferencia entre los pasos pequeños con los pasos grandes, tal como se vio gráficamente en el TP1, habría una separación considerable en lo que refiere a semiejes entre el último paso (el que más se acerca a la solución real) con el primer paso mostrado, esto tiene que ver con el método utilizado (ahora se sabe que es un Euler implícito por las clases vistas) y su orden. Si analizáramos el orden de convergencia para estas variables, convergía en el orden de .

Entonces, ¿Se cumple la primera ley de Kepler? La realidad es que como se mencionó recientemente para pasos grandes la órbita si se podría parecer a la real de la forma elíptica y cerrada, incluso para pasos pequeños tiene una forma elíptica, pero también en este caso se ve un desfasaje notable en el lugar en el que la órbita finaliza, en relación al punto inicial y final el cual no debería ocurrir, como también la mencionada diferencia entre los semiejes. En cuanto a que el Sol se encuentra en uno de los focos no interesa para este caso ya que un caso especial entre dos cuerpos, aquello se verá en la parte B.1 de este trabajo.

A.2: Segunda Ley de Kepler (Algoritmo 1)

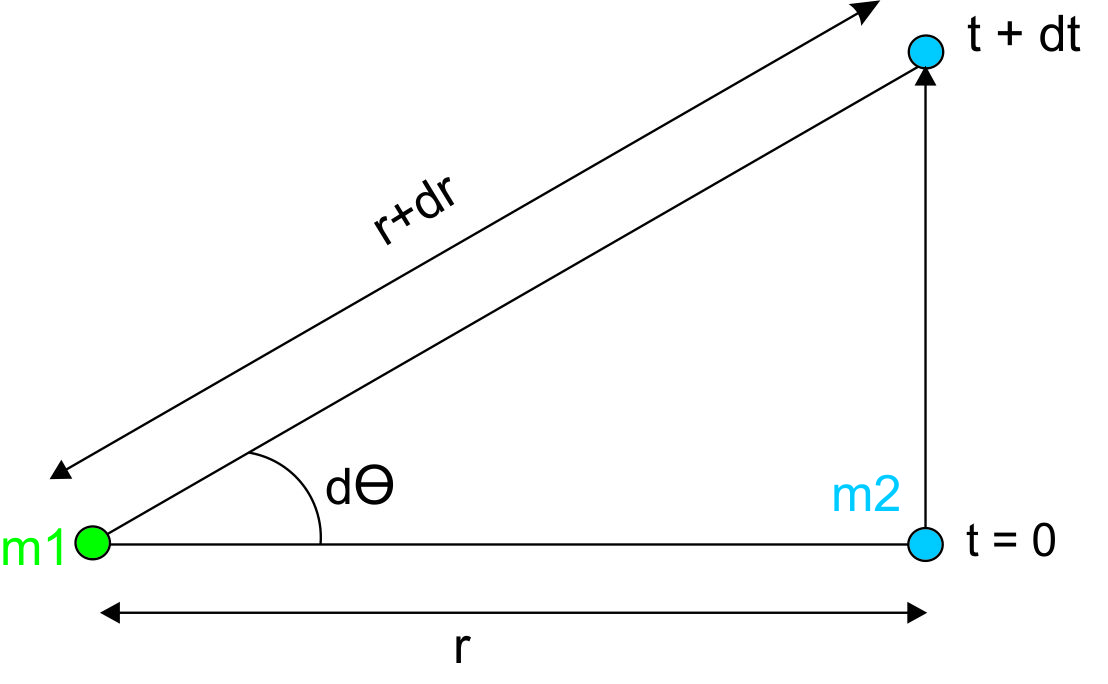
**Segunda ley** (1609): "*El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales*".

Se propone la siguiente ecuación para el análisis del cumplimiento de la segunda ley en la órbita Mustafar:

Donde *dA* es el área barrida por el radio vector desde la estrella al planeta en el tiempo *dt* y h el momento angular especifico.

A partir de cuadratura numérica la idea es llegar al resultado del periodo tal que:

Siendo T el periodo y el área barrida de una órbita, que mediante el siguiente esquema:



Considerando dr chico y

Como el algoritmo uno programa el método de Euler implícito de (orden uno), se podrán usar métodos de cuadratura numérica para la resolución respecto al orden correspondiente, por lo cual sería coincidente utilizar cuadratura numérica por medio de intervalos regulares estrechos a través del método de rectángulo o punto medio.

Utilizando este método se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Área aproximada ()** | **Error del área(∆)** | **Área ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |
| **PASOS (N)** | **Período aproximada ()** | **Error del período (∆T)** | **Período (T)**  **(T =** ± **∆T)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Suponiendo averiguados los datos se vería que el área y periodo convergen a un número. Sin embargo, al igual que sucedió con el cálculo de los semiejes, se notaría una diferencia notable entre las áreas calculadas y los periodos calculados respecto de pasos chicos y grandes, especialmente porque en los primeros pasos también hay un desvío producido por el análisis numérico en cuanto a donde finaliza la elipse (no es el mismo punto final que el inicial). Si analizáramos el orden de convergencia, convergería en el orden de .

Entonces, ¿Se cumple la segunda ley de Kepler? Como este ítem es más específico y menos visible, en un comienzo se puede decir que no se cumple, al menos no exactamente lo esperado en esta segunda ley, principalmente por todo aquello mencionado en el TP1 acerca de los errores, en este ítem influye significativamente la propagación de errores, el método utilizado, tanto el de Euler como el de cuadratura utilizado obligado a tener un orden similar y lento, entre otros factores como por ejemplo un modelo matemático incorrecto (ya que luego se descubrió lo propuesto por Einstein), como también las limitaciones.

A.3: Tercera Ley de Kepler (Algoritmo 1)

**Tercera ley** (1618): "*Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital es directamente proporcional al cubo de la longitud del semieje mayor de su órbita elíptica*".

Se analizará a través de la obtención de una constante por medio del cociente:

Donde es el semieje mayor calculado de la órbita para cada N.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Cociente aproximado** | **Error del cociente** | **Cociente** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Suponiendo averiguados los datos se vería que el área y periodo convergen a una constante. Por lo cual la tercera ley se cumple, pero es principalmente visible una convergencia lenta por el método utilizado, aunque ayudaría el cálculo en este caso la presencia de estar elevados las variables, como también sería contraproducente en el cálculo del error. Si analizáramos el orden de convergencia, converge en el orden de

A.4: Integral de energía del sistema (Algoritmo 1)

Se analizará la conservación de la energía del sistema a través de su fórmula correspondiente, a partir de la diferenciación numérica:

Donde , siendo la aproximación numérica de con y siendo

Como ya fue mencionado en la sección A.2, este algoritmo posee orden uno, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible derivada en atraso o en adelanto, a partir de la conversión de la segunda derivada en una derivada primera, de otra manera se utilizaría un método directo para la segunda derivada.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

Si se realizaran los cálculos y los gráficos correspondientes, se vería que el método convergería a un número y se observaría una diferencia entre los primeros 3 pasos en lo que respecta a la energía, pero se obtendría un gráfico similar al fin y acabo, por lo cual se podría decir que el problema, con este método, en un principio, tendería a ser conservativo, aunque no sería correcto afirmarlo.

A.5: Primera Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.1.

Cálculos del semieje mayor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje mayor aproximado ()** | **Error del semieje mayor (∆a)** | **Semieje mayor (a)**  **(a =** ± **∆a)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

Cálculos del semieje menor de la órbita Mustafar a partir de los resultados del TP1:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Semieje menor aproximado ()** | **Error del semieje menor (∆b)** | **Semieje menor (b)**  **(b =** ± **∆b)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y convergencia**

Suponiendo averiguados los datos se vería que el área y periodo convergen a un número, pero a diferencia del primer algoritmo, la diferencia entre los pasos pequeños con los pasos grandes, tal como se vio gráficamente en el TP1, no sería considerable, son bastante similares en lo que refiere a semiejes entre el último paso (el que más se acerca a la solución real) con el primer paso mostrado, esto tiene que ver con el método utilizado (ahora se sabe que es un RK4 por las clases vistas) y su orden. Si analizáramos el orden de convergencia para estas variables, convergería en el orden de .

Entonces, ¿Se cumple la primera ley de Kepler? Claramente se ve que el orden del método ayuda mucho a obtener hasta con un paso pequeño una solución efectiva buscada para cualquier paso utilizado, y el sistema cumple realiza una órbita elíptica y cerrada. En cuanto la referencia al Sol, presenta el mismo análisis que el punto A.1.

A.6: Segunda Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.2 pero como el algoritmo 2 programa el método de Runge-Kutta 4 de (orden cuatro), se podrán usar métodos de cuadratura numérica para la resolución respecto al orden correspondiente, por lo cual sería coincidente utilizar cuadratura numérica por método de Simpson o Romberg.

Utilizando este método se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Área aproximada ()** | **Error del área(∆)** | **Área ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Período aproximada ()** | **Error del período (∆T)** | **Período (T)**  **(T =** ± **∆T)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Suponiendo averiguados los datos se vería que el área y periodo convergen a un número. Si bien este método posee una mayor aproximación, y tanto los números y el grafico serían más consistentes en cuanto a áreas y periodos debido a su orden y metodología, los resultados siguen sin ser exactos por el análisis producido en el ítem A.2. Si analizáramos el orden de convergencia, convergería en el orden de

Entonces, ¿Se cumple la segunda ley de Kepler? Con un análisis similar al ítem A.2, para este problema numérico posiblemente nunca se llegue exactamente a una solución exacta, aunque sí bastante aproximada en este caso para cualquier paso, debido al orden del método como también la metodología asociada a ese orden para el cálculo de las áreas y periodos.

A.7: Tercera Ley de Kepler (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.3.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Cociente aproximado** | **Error del cociente** | **Cociente** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

**Análisis y orden de la convergencia**

Suponiendo averiguados los datos se vería que se converge a una constante. Por lo cual la tercera ley se cumple, pero en este caso la convergencia es más rápida por el método utilizado, como también más exacto. Si analizáramos el orden de convergencia, convergería en el orden de .

A.8: Integral de energía del sistema (Algoritmo 2)

La resolución es análoga al ítem A.4 pero como ya fue mencionado en la sección A.6, este algoritmo posee orden cuatro, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible aproximación por polinomios de Taylor o por medio del método de Richardson.

Se llega a los siguientes resultados:

|  |  |
| --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |
| 1,00E+02 |  |
| 1,00E+03 |  |
| 1,00E+04 |  |
| 1,00E+05 |  |
| 1,00E+06 |  |
| **1,00E+07** |  |
| 1,00E+08 |  |
| 1,00E+09 |  |
| 1,00E+10 |  |
| 1,00E+11 |  |

**Análisis y convergencia**

Si se realizaran los cálculos y los gráficos correspondientes, se vería que el método convergería a un número y en relación a los gráficos se vería una pequeña diferencia entre los primeros 3 pasos en lo que respecta a la energía, pero más exacto que el del algoritmo uno. Si bien el resultado es muy similar (posiblemente en los gráficos no se vería mucha diferencia), el problema aun tendería a ser conservativo, no sería correcto afirmarlo por el análisis no exacto a través del método numérico.

B: Análisis relativista de orbitas – Leyes de Einstein

En esta sección se utilizará, a través de un cambio de modelo respecto del TP1, dos nuevos algoritmos generalizados con el objetivo, en un principio, de validar como también calcular un nuevo termino llamado precesión. Luego se averiguara la integral de energía del sistema para comprar con el resultado clásico y se analizará si los algoritmos nuevos son útiles para la resolución de este problema.

B.1: Algoritmo 1-GR, precesión y su respectiva validación

La ley de gravitación de Newton propone una solución al problema del movimiento de cuerpos celestes, siendo este acotado a un plano.

Utilizando un sistema de coordenadas polares con origen en uno de los cuerpos y teniendo en cuenta esta vez las leyes de Einstein (hay un cambio de modelo matemático respecto del TP1), el movimiento del otro cuerpo puede ser representado por las siguientes ecuaciones:

(1)

, (2)

, (3)

La idea es mostrar el modelo relativista planteado por Einstein para luego mostrar las soluciones por medio de algoritmia, independientemente de los parámetros especificados.

Los algoritmos a desarrollar se calcularan con simple precisión y utilizan las mismas variables del TP1 excepto por la aparición de la velocidad de la luz que está determinada por

c = 3x108 m/s

Su desarrollo está dado por el siguiente pseudocódigo:

**Algoritmo 1-GR**

Desde a N - 1

Avanzar n

Debido a que la precesión es un corrimiento en el ángulo barrido por el planeta luego de 1 órbita completa, en este inciso se realizará una validación del valor teórico calculado de la precesión para el sistema Sol-Mercurio, siendo este valor (precesión), por medio de la consideración de utilizar un N adecuado y lo suficientemente grande tal que se puedan obtener soluciones confiables teniendo en cuenta el análisis en el inciso B.8 del TP1, evitando la cancelación de términos dependiente del k obtenido según el paso, como también tener en cuenta la capacidad de cálculo del PC y la precisión. Se modificará únicamente para este caso el valor de la variable , que solo en este inciso será . También, por la misma razón del corrimiento se deberá realizar una interpolación debido a que por el análisis numérico la órbita posiblemente no vuelva al mismo lugar donde comenzó y se deberá interpolar entre los 3 puntos más próximos al inicio para deducir la precesión. Como este algoritmo no es muy preciso, es posible que la validación de la precesión se cumpla si o solo si el paso es muy pero muy grande.

B.2: Cálculo de la precesión Estrella-Mustafar (Algoritmo 1-GR)

Aquí el valor de vuelve a ser el establecido en el TP1. Y se calculó la precesión para este caso dando los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Precesión aproximada ()** | **Error de la precesión (∆)** | **Precesión ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

B.3: Integral de energía del sistema (Algoritmo 1-GR)

La resolución es similar al ítem A.4 para el cálculo de la energía pero como este algoritmo es otro, se tienen diferentes resultados, aunque igualmente se sigue poseyendo orden uno, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible derivada en atraso o en adelanto, a partir de la conversión de la segunda derivada en una derivada primera, de otra manera se utilizaría un método directo para la segunda derivada.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |  |
| 1,00E+02 |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |

Para los valores presentes en el sistema solar los resultados cuantitativos de la teoría einsteniana son numéricamente muy cercanos a la teoría newtoniana, se vería que el método convergería a un número y el problema aun tendería a ser conservativo, no sería correcto afirmarlo por el análisis no exacto a través del método numérico, en este caso aún menos por la aparición del termino relativista de Einstein.

B.4: Análisis de aptitud del algoritmo 1-GR

Si bien el nuevo termino de Einstein se utiliza para validar y verificar teoremas relativistas particulares, el pequeño termino que aparece influye en este algoritmo bruscamente por el orden que este posee, por lo cual se podría decir que este algoritmo será apto para una visión genérica del problema en cuestión, para pasos muy grandes, pasos que quizás deban ser calculados en lo posible (para verlo claramente) en una supercomputadora.

B.5: Algoritmo 2-GR, precesión y su respectiva validación

Este inciso es análogo al B.1 pero con la generalización del algoritmo 2 del TP1.

Su desarrollo está dado por el siguiente pseudocódigo:

El algoritmo es bastante consistente durante todos sus pasos por eso seria una mejor aproximación a la validación del problema.

**Algoritmo 2-GR**

Desde a N - 1

Avanzar n

B.6: Cálculo de la precesión Estrella-Mustafar (Algoritmo 2-GR)

Inciso análogo al B.2. Se calculó la precesión para este caso dando los siguientes resultados:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** | **Precesión aproximada ()** | **Error de la precesión (∆)** | **Precesión ()**  **( =** ± **∆)** |
| 1,00E+02 |  |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |  |

B.7: Integral de energía del sistema (Algoritmo 2-GR)

La resolución es similar al ítem B.3 para el cálculo de la energía pero como este algoritmo es otro, se tienen diferentes resultados, aunque igualmente se sigue poseyendo orden cuatro, por lo cual deberá realizarse una diferenciación numérica acorde al orden especificado, siendo la resolución una posible aproximación por polinomios de Taylor o por medio del método de Richardson.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **PASOS (N)** |  |  |
| 1,00E+02 |  |  |
| 1,00E+03 |  |  |
| 1,00E+04 |  |  |
| 1,00E+05 |  |  |
| 1,00E+06 |  |  |
| **1,00E+07** |  |  |
| 1,00E+08 |  |  |
| 1,00E+09 |  |  |
| 1,00E+10 |  |  |
| 1,00E+11 |  |  |

B.8: Análisis de aptitud del algoritmo 2-GR

Si bien el nuevo término de Einstein se utiliza para validar y verificar teoremas relativistas particulares, el pequeño término que aparece influye en este algoritmo, pero por el orden que posee, el algoritmo es consistente y devuelve soluciones aceptables para pasos no tan pequeños. Si bien no sea posiblemente suficiente para resolver el problema completamente, es definitivamente la mejor aproximación que se puede tener con los algoritmos dados y mientras mayor sea el paso, más precisa será la solución, aunque también posee una gran propagación de errores por la metodología compleja.

Conclusión

El análisis numérico se ocupa de estudiar algoritmos para resolver problemas de la matemática continua. Dado que estos algoritmos son una aproximación al problema matemático, resulta evidente que los resultados obtenidos estarán afectados por algún tipo de error, siendo para este caso el problema matemático el planteado por Newton con la corrección relativista de Einstein, y el problema numérico el resuelto por los algoritmos propuestos. Aquí ya se puede apreciar el primer error cometido con diferencia del TP1, la idea de considerar el modelo propuesto por Newton el correcto, siendo el error no considerar en su modelo el término relativista adicional. Luego tanto como en el TP1 fue mencionado, existe la incidencia de los *errores de redondeo* como también de *truncamiento* y *entrada*. No vale la pena extenderse tanto en este tema ya que fue analizado en el TP1, aunque si vale la pena mencionar que estos algoritmos contienen tanto error de redondeo, debido a la precisión finita de la máquina, como error de truncamiento, debido a la naturaleza del problema matemático y errores de entrada por los datos de las variables propuestas.

Lo que se buscó ver en la sección A es por un lado un análisis más profundo del problema propuesto por Newton, y a través de los cálculos previos, verificar la convergencia de lo que fueron los métodos de Euler implícito y Runge-Kutta 4 (sin saber que eran estos en el TP1), teniendo siempre en cuenta el orden propuesto para la realización de la cuadratura y diferenciación numérica para ser consistente durante todo el proceso, como también ver de una manera más sencilla que el problema es conservativo a través del análisis de su energía. Como este es un PVI la idea de que el sistema converja habla de un problema bien condicionado, aunque sería conveniente verificar esto para ambos casos a través de perturbaciones de Von Neumann.

Luego se puede ver el análisis de estabilidad desde otro punto de vista en la sección B. Debido a la presencia del término nuevo llamado precesión, se buscó validar los resultados teóricos como también ver los resultados y analizar a partir de aquí si el problema y el algoritmo eran lo suficientemente útiles para poder resolverlos. Generalmente el método de Euler implícito suele ser incondicionalmente estable **lo cual aquí se puede ver por los cálculos de la precesión,** como también tiene la desventaja de ser implícito y de orden uno, por lo cual después de todo lo analizado posiblemente para un problema tan complejo no sea lo mejor el uso de este algoritmo. Luego a través del método de RK4, tiene la ventaja de ser explicito por un lado pero la desventaja de tener una condición máxima de estabilidad, aunque si es recomendable para este caso por tener orden 4 para resolver este tipo de problema complejo.

Las principales diferencias y similitudes entre los algoritmos uno y dos son:

* *Velocidad de cómputo*: la del algoritmo dos GR es mayor que la del algoritmo uno GR
* *Orden*: el orden del algoritmo 2-GR es mayor que la del algoritmo 1-GR debido que los métodos utilizados son los mismos pero con la variación del término de Einstein.
* *Precesión*:
* Relación de energía
* El segundo algoritmo-GR está mejor condicionado que el primero, debido a que la solución cuando los pasos son pequeños se parece bastante a la solución con pasos grandes, en cambio para el primero hay una cierta diferencia notable tanto durante la trayectoria como el punto en que finaliza. Como también posee un mayor orden y el método es explicito se puede imponer una condición de estabilidad para este caso, permitiendo una resolución correcta a partir de este análisis.

Anexo I: Código fuente

/\*

\*\* Universidad de Buenos Aires

\*\* Facultad de Ingeniería

\*\* 75.12 Análisis Numérico I

\*\* Trabajo Práctico II

\*\*

\*\* Merlo Leiva Nahuel – Fabrizio Luis Cozza

\*\* Padrón 92115 - Padrón 97402

\*/

Anexo II: Salida